Mathematik: Lineare Algebra HU Berlin, WS 2019/20
Aufgabenblatt 13 Ausgabe: 23.1.2020
Dr. J. Brödel, Dr. A. Maier, M. Mühlbauer, J. Niehues Abgabe: 30.1.2020

1. Satz von Cayley-Hamilton **[4 Punkte]**

a) Sei $A \in GL(n, \mathbb{K})$. Drücken Sie mit Hilfe des Satzes von Cayley-Hamilton die inverse Matrix A^{-1} als Polynom in A aus. Beweisen Sie damit die bekannte Formel für die Inversion einer 2×2-Matrix!

b) Berechnen Sie mit dem Satz von Cayley-Hamilton die Matrix

$$\sin A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}, \text{ wobei } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

2. Trigonalisierung und Jordansche Normalform **[7 Punkte]**

a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & r \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad r \neq 0$$

mit Eigenwert λ_1. Finden Sie eine Ähnlichkeitstransformation SAS^{-1}, also eine Matrix $S \in GL(n, \mathbb{R})$, die A in Jordansche Normalform überführt.

b) Bestimmen Sie diejenigen Werte von $a, b \in \mathbb{C}$ für die die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ -b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

nicht diagonalisierbar ist. Bestimmen Sie für diese Fälle eine Matrix $S \in GL(n, \mathbb{C})$ so, dass SBS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.

3. Cauchy-Schwarzsche Ungleichung **[4 Punkte]**

Sei $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit $F(x) = Ax$ und $A \in M(n \times m; \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$\|F(x)\| \leq \|A\| \|x\| ,$$

wobei $\|A\|^2 := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2$ und $\|x\|$ die kanonische Norm von x ist.

$\Longrightarrow$

4. Skalarprodukt **[5 Punkte]**

a) Gegeben sei der Vektor $v = (2, 4, 3)$ im $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie denjenigen Einheitsvektor w aus der e_2-e_3-Ebene (kanonische Einheitsvektoren sollen hier angenommen werden), für den das kanonische Skalarprodukt $\langle w, v\rangle$ maximal wird! Welchen Winkel schließen die beiden Vektoren ein? Für welchen Vektor w ergibt sich der maximale Winkel zwischen den beiden Vektoren?

b) Sei V ein euklidischer Vektorraum und seien $x, y \in V$. Seien weiterhin $e_1, \dots e_l$ paarweise orthogonale Einheitsvektoren in V. Zeigen Sie:

- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \langle x, y\rangle = 0$
- $\|x\| = \|y\| \quad \Leftrightarrow \quad \langle x + y, x - y\rangle = 0$
- $\sum_{k=1}^{l} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.