1. Aller guten Dinge...

Sei $F = \{0, 1\}$ mit den Standardoperationen der kleinste zweielementige Körper. Finden Sie zwei Matrizen $A, B \in M(2 \times 2; F)$, so dass die drei Eigenschaften

(a) $A^2 = E_2$, wobei $A \neq E_2$

(b) $B^2 = 0$, wobei $B \neq 0$ ist

(c) $AB \neq BA$

gleichzeitig erfüllt sind.

2. Matrizenkalkül

Sei $A \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$ mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Komponenten der Matrix

$$B := A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E_2$$

3. Inversionen

a) Seien $A, B, S \in M(n \times n; \mathbb{C})$, S invertierbar, mit $B = S\,A\,S^{-1}$. Dann ist
☐ $S\,B\,S^{-1} = A$ ☐ $B^2 = S\,A^2\,S^{-1}$ ☐ $B\,S = S\,A$.

b) Sei $A \in M(n \times n; \mathbb{C})$ fest und S eine beliebige Matrix aus $M(n \times n; \mathbb{C})$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?
☐ Für jedes S läßt sich $S\,A$ aus A durch Zeilentransformationen gewinnen.
☐ Geht $\tilde{A}$ aus A durch Spaltentransformationen hervor, so gibt es ein S mit $\tilde{A} = A\,S$.

c) Für $A, B \in M(n \times n; \mathbb{C})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt immer:
☐ $\big((AB)^T\big)^{-1} = (A^T)^{-1}(B^T)^{-1}$
☐ $(\lambda\,A)^* = \lambda A^*$.

d) Zwei Matrizen $A, B \in M(n \times n; K)$ heißen *ähnlich*, wenn
☐ es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ gibt, so dass $B = S^{-1}A\,S$
☐ es eine Matrix $S \in M(n \times n, K)$ gibt, so dass $S\,B = A\,S$
☐ es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ gibt, so dass $A = S\,B$.

e) Zwei Matrizen $A, B \in M(m \times n; K)$ heißen *äquivalent*, wenn
☐ es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(m, K)$ und eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(n, K)$ gibt, so dass $B = S\,A\,T$
☐ es eine Matrix $S \in M(n \times n, K)$ und eine Matrix $T \in M(m \times n, K)$ gibt, so dass $B = S^{-1}\,A\,T$
☐ es eine Matrix $S \in M(m \times n, K)$ und eine Matrix $T \in M(n \times n, K)$ gibt, so dass $B = S^{-1}\,A^{-1}\,T$.