Mathematik: Lineare Algebra
Aufgabenblatt 8

Dr. J. Brödel, Dr. A. Maier, M. Mühlbauer, J. Niehues

HU Berlin, WS 2019/20
Ausgabe: 5.12.2019
Abgabe: 12.12.2019

1. Inversion und Normalform **[6 Punkte]**

a) Prüfen Sie, ob die folgenden Matrizen invertierbar sind. Wenn ja, finden Sie die inverse Matrix und geben Sie den Rechenweg an!

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ 1-i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Folgen Sie hierbei der in der Vorlesung gezeigten Methode und überprüfen Sie Ihr Ergebnis explizit!

b) Bringen Sie die folgenden Matrizen unter Benutzung von Zeilen- oder Spaltentransformationen (bzw. den dazu korrespondierenden Elementarmatrizen), in Normalform! Geben Sie ebenfalls Ihren Rechenweg sowie die Matrizen S und T^{-1} an!

$$\begin{pmatrix} -3 & -20 & -13 \\ 21 & 141 & 92 \\ -23 & -149 & -98 \\ 2 & 10 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 12 & 9 & -6 \\ 16 & 12 & -8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4 & -33 & 107 \\ 4 & 31 & -100 \end{pmatrix}$$

2. Transposition als lineare Abbildung? **[3 Punkte]**

Betrachten Sie eine beliebige Matrix $A \in M(n \times n; K)$. Finden Sie eine Abbildungsmatrix F, die auf den n^2-dimensionalen Vektorraum der Matrizen in geeigneter Weise wirkt, so dass F die Transposition $A \mapsto A^T$ vermittelt.

3. Permutierte Basen **[3 Punkte]**

Die zyklische Gruppe $S_4 = \mathbb{S}(\{1,2,3,4\})$ ist die Gruppe der Permutation von vier Elementen, also eine Gruppe deren Elemente Abbildungen sind.

a) Betrachten Sie eine beliebige Basis (v_1, v_2, v_3, v_4) des Raumes $\mathbb{R}^4$. Finden Sie die zur Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

gehörige Abbildungsmatrix S, also eine Matrix, die den Basiswechsel von

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) \quad \text{zu} \quad (v_4, v_2, v_3, v_1)$$

vermittelt.

b) Überlegen Sie sich, welche Eigenschaften derartige Permutationsmatrizen generell haben müssen. Zeigen Sie, dass diese Eigenschaften mit den Gruppenaxiomen kompatibel sind!

$\Longrightarrow$

4. Basiswechsel **[8 Punkte]**

Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ zusammen mit der kanonischen Basis $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$. Weiterhin seien die Basen

$$\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3) = (\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}) \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3) = (\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix})$$

gegeben. Die Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{A}$ sollen mit x_1, x_2, x_3 und die Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ sollen mit y_1, y_2, y_3 bezeichnet werden.

a) Finden Sie die Matrixdarstellungen für die Isomorphismen $\Phi_\mathcal{A}$ und $\Phi_\mathcal{B}$, so dass

$$\Phi_\mathcal{A}(e_i) = v_i \quad \text{und} \quad \Phi_\mathcal{B}(e_i) = w_i\,.$$

b) Betrachten Sie den Vektor $p = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}_\mathcal{E}$, wobei der untere Index bedeutet, dass die Koordinaten bezüglich der kanonischen Basis angegeben sind. Drücken Sie den Vektor p sowohl in der Basis $\mathcal{A}$ als auch in der Basis $\mathcal{B}$ aus.

c) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $T_\mathcal{B}^\mathcal{A}$ des Basiswechsels von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, also diejenige Matrix, die die Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{A}$ in die Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ mittels

$$T_\mathcal{B}^\mathcal{A} \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_\mathcal{A} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}_\mathcal{B}$$

überführt. Überprüfen Sie, dass die Transformationsmatrix wirklich die beiden Darstellungen $p_\mathcal{A}$ und $p_\mathcal{B}$ des Vektors p aus Aufgabenteil b) verknüpft. Finden Sie weiterhin diejenige Transformationsmatrix S, die das Koordinatensystem $\Phi_\mathcal{B}$ in das Koordinatensystem $\Phi_\mathcal{A}$ übersetzt.

d) Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto A\,x \end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}_\mathcal{E}.$$

Stellen Sie die Abbildung in den Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ dar. Wenden Sie die Abbildung $F_\mathcal{A}$ auf den Vektor $p_\mathcal{A}$ an und drücken Sie das Ergebnis in den drei Basen $\mathcal{E}, \mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ aus.