Mathematik: Lineare Algebra

Aufgabenblatt 1

Dr. J. Brödel, Dr. A. Maier, M. Mühlbauer, J. Niehues

HU Berlin, WS 2019/20
Ausgabe: 17.10.2019
Abgabe: 24.10.2019

*Die Lösungen bitte am Abgabetag **vor** der Vorlesung abgeben. Die abgegebenen Lösungen werden nur korrigiert, wenn auf dem Lösungsblatt **Name, Übungsgruppe** und **Matrikelnummer** klar lesbar notiert sind und – im Falle mehrerer Blätter – diese zusammengeheftet sind.*
Für die Aufgabenblätter gilt: gerne gemeinsam bearbeiten, aber hinterher alleine aufschreiben. Bei offensichtlich identischen Lösungen werden die erreichten Punkte auf die Einreichenden verteilt.

1. Bilder und Urbilder [5 Punkte]

Seien A, B Mengen und $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Weiterhin seien $A_1, A_2 \subset A$ und $B_1, B_2 \subset B$. Zeigen Sie:

a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

b) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
Geben Sie ein Beispiel an, in dem $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ gilt!

c) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

d) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

2. Mächtigkeit der Potenzmenge [4 Punkte]

Sei X eine Menge der Mächtigkeit n. Zeigen Sie, dass die Mächtigkeit der dazugehörigen Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ gerade 2^n ist.

3. Verneinung von Aussagen [3 Punkte]

In dieser Aufgabe geht es darum, Aussagen zu verneinen. Die wohl einfachste Form der Verneinung, ein einfaches Voranstellen eines ,,Verneinungsoperators", also eines einfachen ,,**nicht**", soll hier aber vermieden werden. Stattdessen sollen Sie möglichst eine positive Aussage formulieren.

Ein Beispiel soll dies verdeutlichen. Die Aussage „Alle Kinder haben rote oder schwarze Mützen auf“ könnte man leicht verneinen, indem man sagt: „**Nicht** alle Kinder tragen eine rote oder eine schwarze Mütze.“ Eine positive Möglichkeit wäre: „Es gibt mindestens ein Kind, das weder eine rote noch eine schwarze Mütze trägt.“ (Wobei hier angenommen werden soll, dass alle Kinder genau eine Mütze tragen.)

Finden Sie Verneinungen der folgenden Aussagen:

a) Sei $M \subset \mathbb{N}$. „$\forall\, x \in M$ gilt: $x \leq C$.“

b) Sei $M \subset \mathbb{N}$. „$\exists\, C > 0 : x \leq C\, \forall\, x \in M$“ .

c) „Aus $x \in A$ folgt $x \in B$“.

$\Longrightarrow$

4. Induktion und Rekursion **[8 Punkte]**

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

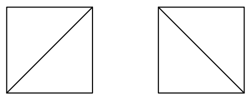
$$\sum_{j=1}^{n} j(j+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

b) Die Catalan-Zahlen C_n geben an, auf wie viele verschiedene Arten ein konvexes $(n+2)$-gon trianguliert werden kann. Sie sind mittels

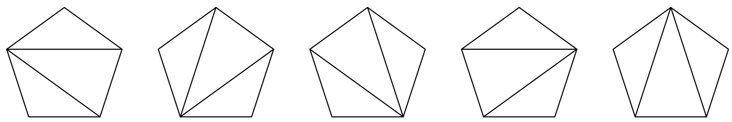
$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \qquad (*)$$

definiert.

$C_{(4-2)} = C_2 = 2:$



$C_{(5-2)} = C_3 = 5:$



Machen Sie sich am Beispiel einiger kleiner n klar, dass die Catalan-Zahlen über die folgende Rekursionsrelation berechnet werden können:

$$C_0 = 1, C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}\,.$$

Der Beweis der Gleichheit dieser Rekursionsformel zu Glchg. $(*)$ ist aufwändig und erfordert ein wenig Kombinatorik. Unter `https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_number` finden sich einige (schöne) Beweise. Hier soll unter Benutzung von Glchg. $(*)$ die Gültigkeit der folgenden Formel gezeigt werden:

$$C_0 = 1, C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n\,.$$