1. Norm und Skalarprodukt

Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

- a) $\langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$
- b) $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \cdot \|y\| \cos \vartheta$
- c) $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\langle x, y \rangle$
- d) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

2. Skalarprodukt, Bilinear- und Sesquilinearformen

- a) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$. Welche Vektoren bilden eine Orthonormalbasis?

$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$

- b) Die Abbildung

$$\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$$
$$(x, y) \mapsto \overline{x_1}y_2 + \overline{x_2}y_1 + \overline{x_1} + y_1$$

ist

- ein Skalarprodukt eine Bilinearform eine Sesquilinearform
- c) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf dem reellen Vektorraum V . $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist positiv definit genau dann, wenn
- $\forall v \in V \langle v, v \rangle \geq 0$
 - $\forall v \in V \langle v, v \rangle \geq 0$ und $\langle v, v \rangle = 0$ nur für $v = \vec{0}$
 - $\forall v \in V \setminus \{\vec{0}\} \langle v, v \rangle > 0$.

3. Eigenwerte zu verschiedenen Matrizen

- a) Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^n$. Dann ist die
- Matrix mit den Vektoren v_i als Spaltenvektoren orthogonal
 - Matrix mit den Vektoren v_i als Zeilenvektoren orthogonal
 - Matrix $A = (\langle v_i, v_j \rangle)$ die Einheitsmatrix.
- b) Sei A eine hermitesche 3×3 -Matrix. Welche der folgenden Aussagen kann *unmöglich* zutreffen? A hat die Eigenwerte
- 2, 3, 4, 5. $i, -i, 1$. 1, 0.
- c) Sei U eine unitäre (3×3) -Matrix. Welche der folgenden Aussagen kann *unmöglich* zutreffen?
- U hat keine Eigenwerte U hat Eigenwerte 1, -1 U hat Eigenwerte $i, -i, 0$
- d) Sei O eine diagonalisierbare, orthogonale 3×3 -Matrix mit $\det O = 1$. Was könnten mögliche Eigenwerte (mit Vielfachheit) von O sein?
- 1, 1, 1 1, 1, -1 1, -1, -1.