Mathematik: Lineare Algebra HU Berlin, WS 2019/20
Aufgabenblatt 14 Ausgabe: 30.1.2020
Dr. J. Brödel, Dr. A. Maier, M. Mühlbauer, J. Niehues Abgabe: 6.2.2020

1. Begriffe **[6 Punkte]**

Betrachten Sie die folgenden Definitionen (diese wurden entweder bereits eingeführt oder werden demnächst behandelt):

- Eine Matrix $S \in M(n \times n; \mathbb{R})$ heißt ***symmetrisch***, falls $S^T = S$.
- Eine Matrix $O \in GL(n; \mathbb{R})$ heißt ***orthogonal***, falls $O^T = O^{-1}$.
- Eine Matrix $H \in M(n \times n; \mathbb{C})$ heißt ***hermitesch***, falls $H = H^\dagger = \overline{H}^T$.
- Eine Matrix $U \in GL(n; \mathbb{C})$ heißt ***unitär***, falls $U^\dagger = U^{-1}$.

Zusätzlich definiert man:

- Eine Matrix $N \in M(n \times n; \mathbb{C})$ heißt ***normal***, falls N mit $N^\dagger$ kommutiert.

a) Seien nun $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$ und $B \in M(n \times n; \mathbb{C})$ gegeben. Beweisen Sie

1.) Symmetrische, orthogonale, hermitesche und unitäre Matrizen sind alle normal.

2.) O orthogonal und $O A O^{-1}$ diagonal $\Longrightarrow$ A ist symmetrisch.

3.) U unitär und $U B U^{-1}$ diagonal $\Longrightarrow$ B ist normal.

4.) U unitär und $U B U^{-1}$ diagonal und die Eigenwerte von B sind alle reell $\Longrightarrow$ B ist hermitesch.

b) Betrachten Sie die Menge $O(n) = \{X \in M(n \times n; \mathbb{R}) \,|\, X^T = X^{-1}\}$.

1.) Zeigen Sie, dass $(O(n), \cdot)$ eine Gruppe ist. Hier bezeichnet $\cdot$ die gewöhnliche Matrixmultiplikation.

2.) Zeigen Sie, dass $SO(n) := \{X \in O(n) \,|\, \det X = 1\}$ eine Untergruppe von $O(n)$ ist.

3.) Sei die Exponentialfunktion für Matrizen durch

$$e^A := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

definiert. Sei weiterhin $X \in M(n \times n; \mathbb{R})$ schiefsymmerisch, d.h. mit der Eigenschaft $X^T = -X$. Zeigen Sie, dass $e^X \in O(n)$. Verwenden Sie dazu, dass $e^{(-A)} = (e^A)^{-1}$ (ohne Beweis).

c) Betrachten Sie die Menge $U(n) = \{X \in M(n \times n; \mathbb{C}) \,|\, X^\dagger = \overline{X}^T = X^{-1}\}$.

1.) Zeigen Sie, dass $(U(n), \cdot)$ eine Gruppe ist.

2.) Zeigen Sie, dass $SU(n) := \{X \in U(n) \,|\, \det X = 1\}$ eine Untergruppe von $U(n)$ ist.

3.) Sei $X \in M(n \times n; \mathbb{C})$ hermitesch. Zeigen Sie, dass $e^{iX} \in U(n)$.

$\Longrightarrow$

2. Gramsche Determinante **[6 Punkte]**

Sei $V = (v_1, \dots, v_n)$ eine Familie von Vektoren aus $\mathbb{R}^n$. Weiterhin bezeichne $\langle , \rangle$ das kanonische Skalarprodukt. Dann sind die Elemente g_{ij} der Gramschen Matrix $\mathcal{G}$ mittels

$$g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

definiert. Die Determinante dieser Matrix heißt die *Gramsche Determinante.*

a) Nehmen Sie an, dass die Vektoren v_i paarweise orthogonal sind und berechnen Sie für diese Situation die Gramsche Determinante.

b) Zeigen Sie, dass die Familie von Vektoren V genau dann linear unabhängig ist, wenn die Gramsche Determinante nicht verschwindet.

c) Zeigen Sie, dass für eine linear unabhängige Familie von Vektoren V die Gramsche Matrix positiv definit ist. Eine Matrix $A \in M(n \times n; \mathbb{C})$ heißt *positiv definit*, wenn für alle Vektoren $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq \vec{0}$ gilt, dass $\overline{x}^T A x > 0$.
Hinweis: zeigen Sie zunächst, dass für $n = 2$ die Bedingung der positiven Definitheit von $\mathcal{G}(v_1, v_2)$ gerade der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung entspricht.

d) **Zusatz (ohne Punkte):** Können Sie auch die Umkehrung zeigen? Gegeben sei eine positiv definite Matrix $A \in M(n \times n; \mathbb{C})$. Beweisen Sie, dass es eine Familie von linear unabhängigen Vektoren so gibt, dass A gerade deren Gramsche Matrix ist.

3. Vektorprodukt **[4 Punkte]**

Zeigen Sie, dass die kürzeste Entfernung d eines Punktes p (aufgefaßt als Vektor in $\mathbb{R}^3$) von der Geraden $g \colon x = a + \lambda b$ mit $a, b \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ durch

$$d = \frac{\|b \times (p - a)\|}{\|b\|}$$

gegeben ist und berechnen Sie damit den Minimalabstand des Punktes $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ zur Geraden $g \colon x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren **[4 Punkte]**

Gegeben sei die Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

im $\mathbb{R}^3$. Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren an, um daraus eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$ zu bestimmen.