Mathematik: Lineare Algebra

Aufgabenblatt 2

Dr. J. Brödel, Dr. A. Maier, M. Mühlbauer, J. Niehues

HU Berlin, WS 2019/20
Ausgabe: 24.10.2019
Abgabe: 31.10.2019

1. Eindeutigkeit des inversen Elements [3 Punkte]

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Satz: *Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $a \in G$ beliebig. Seien $a', a'' \in G$ zu a inverse Elemente. Dann gilt $a' = a''$.*

2. Verknüpfung auf der Potenzmenge [4 Punkte]

Sei G eine Menge mit assoziativer Verknüpfung $\cdot$. Sei e neutrales Element bezüglich $\cdot$, d.h. für jedes $g \in G$ gilt $e \cdot g = g \cdot e = g$. Auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(G)$ von G sei die Verknüpfung

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}(G) \times \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G) \\ &\qquad (A, B) \mapsto A * B := \{g \in G \mid \exists a \in A, b \in B \colon g = a \cdot b\} \end{aligned}$$

definiert. Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $*$ assoziativ ist, es zu ihr ein neutrales Element gibt und bestimmen Sie dieses!

3. Verknüpfung von Abbildungen [9 Punkte]

a) Seien $f \colon X \to Y$ und $g \colon Y \to Z$ zwei Abbildungen. Die Komposition der Abbildungen, $h = g \circ f$, ist somit eine Abbildung $h \colon X \to Z$.

- Beweisen Sie, dass wenn h injektiv ist, daraus folgt, dass auch f injektiv ist.
- Beweisen Sie, dass aus Surjektivität von h auch die Surjektivität von g folgt.
- Gilt (h surjektiv)$\Rightarrow$(f surjektiv)? Gilt (h injektiv)$\Rightarrow$(g injektiv)?

Finden Sie ein Gegenbeispiel, falls eine der Aussagen nicht gilt.

b) Es seien vier Mengen A, B, C und D zusammen mit drei Abbildungen $f \colon A \to B$, $g \colon B \to C$ und $h \colon C \to D$ gegeben. Beweisen Sie, dass aus der Bijektivität von $g \circ f$ und $h \circ g$ folgt, dass f, g und h alle bijektiv sind.

4. Potenzmengen [4 Punkte]

Seien M und N zwei Mengen. Betrachten Sie die folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} f \colon \mathcal{P}(M \cup N) &\to \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(N) \\ A &\mapsto (A \cap M, A \cap N)\,. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

b) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist, wenn $M \cap N = \varnothing$.