1. Lineares Gleichungssystem I

Jedes homogene lineare Gleichungssystem in n Variablen bestehend aus m Gleichungen

☐ hat immer mindestens eine Lösung

☐ kann nie genau zwei verschiedene Lösungen besitzen

☐ hat nie mehr als eine Lösung falls $m > n$ ist.

2. Lineares Gleichungssystem II

Sei $Ax = 0$ ein homogenes lineares Gleichungssystem (wobei die Matrix A m Zeilen und n Spalten hat), das durch genau einen Vektor x gelöst wird. Durch elementare Zeilenumformungen wird A in Zeilenstufenform $\tilde{A}$ gebracht. Dann gilt

☐ in $\tilde{A}$ ist die Anzahl der Pivot-Elemente $r = m$

☐ in $\tilde{A}$ ist die Anzahl der Pivot-Elemente $r = n$

☐ die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.

3. Polynomraum

Gegeben sei der Raum

$$V_n = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \,|\, a_j \in \mathbb{R}\,\forall j\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hierbei heißt die abstrakte Größe t die „Unbestimmte“.

a) Zeigen Sie, dass V_n bezüglich skalarer Multiplikation und Addition von Polynomen ein Vektorraum ist. Geben Sie eine Basis für den Vektorraum an! Welche Dimension hat V_n?

b) Betrachten Sie die Abbildung

$$\mathcal{D}_n \colon V_n \to V_{n-1},\ P_n \mapsto \frac{d}{dt} P_n$$

wobei $P_n \in V_n$. Finden Sie eine Matrixdarstellung für $\mathcal{D}_n$! Welche Dimensionen hat die Matrix?

c) Können Sie auch eine Matrixdarstellung für die zu $\mathcal{D}_n$ inverse Abbildung $\mathcal{I}_n$ aufschreiben?

4. Rang I

Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit Rang $F = n$: dann gilt

☐ $\text{rang}\, F \circ F = n$ ☐ $\text{rang}\, F \circ F < n$ ☐ $\exists\, m \in \mathbb{N}, m > 0, \text{so dass}\, \text{rang}\, F^m = 0\,.$

5. Rang II

Sei nun $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit Rang $F < n$: dann gilt

☐ Rang $F \circ F \geq n$.

☐ Rang $F \circ F < n$.

☐ $\exists\, m \in \mathbb{N}$, $m > 0$ so dass Rang $F^m = 0$.

Geben Sie für die letzte Aussage ein Beispiel oder Gegenbeispiel an!