1. Gleichungssysteme **[9 Punkte]**

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme und geben Sie jeweils die komplette Lösungsmenge – wenn nötig in parametrisierter Form – an! Zeichnen Sie (in einem Rechtssystem, Kavalierperspektive) für jedes Gleichungssystem die drei Ebenen, deren Schnitt die Lösungsmenge ist und heben Sie die Lösungsmenge farblich hervor.

$$Ax = b \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -6 & 3 & 2 \\ -6 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Existenz **[3 Punkte]**

Gegeben sei eine Abbildung $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F\colon (2,0) \mapsto (0,1),\ F\colon (1,1) \mapsto (5,2) \quad \text{und} \quad F\colon (1,2) \mapsto (2,3).$$

Kann die Abbildung F linear sein? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

3. Schiefsymmetrie **[4 Punkte]**

Eine Matrix A heißt *schiefsymmetrisch*, wenn $A^T = -A$. Zeigen Sie, dass die durch die schiefsymmetrische Matrix A gegebene Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x^T A y \end{aligned}$$

eine schiefsymmetrische bilineare Abbildung ist, d.h. dass $f(x,y) = -f(y,x)$. Eine Abbildung zweier Argumente heißt *bilinear*, wenn sie linear in jedem Argument ist.

$\Longrightarrow$

4. $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ **[4 Punkte]**

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass man $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ auch als zweidimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Basis $(1, i)$ darstellen kann. Dies ist *kein* Standardraum, er läßt sich also nicht in der Form K^n für einen Körper K darstellen. Betrachten Sie nun

$$V = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \subset M(2 \times 2; \mathbb{R}) \,.$$

Zeigen Sie, dass der dadurch beschriebene Raum ein Vektorraum ist. Zeigen Sie weiterhin, dass V zusammen mit der Matrixmultiplikation isomorph zum Körper $\mathbb{C}$ ist.

Hinweis: hier ergibt sich eine Abbildung zwischen zwei verschiedenen algebraischen Strukturen: einem Vektorraum zusammen mit einer inneren Multiplikation und einem Körper. Dies liegt daran, dass im Komplexen die Multiplikation mit der imaginären Einheit innerhalb der komplexen Zahlen, also im Körper $\mathbb{C}$, definiert ist, in V aber als eine weitere innere Multiplikation $V \times V \to V$ realisiert ist. Einen Vektorraum zusammen mit einer solchen inneren Multiplikation nennt man eine *Algebra* über dem dem Vektorraum zugrundeliegenden Körper.