Dr. J. Brödel, Dr. A. Maier, M. Mühlbauer, J. Niehues

1. Sarrus vs. Laplace

Zeigen Sie, dass der Ausdruck für die Determinante einer 3×3-Matrix, die Sie mit Hilfe der Regel von Sarrus erhalten, dem Ausdruck für die Determinante aus dem Laplaceschen Entwicklungssatz äquivalent ist.

2. Cramersche Regel

Lösen Sie das folgende System mit der Cramerschen Regel:

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

3. Eigenwerte und Eigenvektoren

a) Für die Einheitsmatrix E_n gilt:
☐ sie hat nur einen Eigenwert, 1.
☐ $\mathrm{Eig}(E_n; 1) = \mathbb{R}^n$
☐ hat alle Vektoren in $\mathbb{R}^n$ als Eigenvektoren.

b) Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Welche der folgenden Vektoren sind Eigenvektoren von A?

☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist

☐ $\mathrm{Eig}(A; 0) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\mathrm{Eig}(A; 1) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\mathrm{Eig}(A; 0) = \{\vec{0}\}$.

d) Eine quadratische Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn
☐ $\det A \neq 0$
☐ 0 kein Eigenwert von A ist
☐ $\forall n \in \mathbb{N} \colon A^n \neq 0$.

e) Sei λ Eigenwert sowohl von A als auch von B. Dann ist
☐ λ auch Eigenwert von A^2
☐ λ^2 Eigenwert von A^2
☐ λ^2 Eigenwert von AB .

f) Sei $F \colon V \to V$ ein Endomorphismus und $v \in V$ ($v \neq \vec{0}$) ein Vektor mit der Eigenschaft $F(-v) = \lambda \cdot v$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist
☐ v Eigenvektor von F zum Eigenwert λ
☐ $-v$ Eigenvektor von F zum Eigenwert λ
☐ v Eigenvektor von F zum Eigenwert $-\lambda$.