1. Komplementärmatrix **[5 Punkte]**

Betrachten Sie die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 14 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & -2 \\ -6 & 8 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 3/2 & -2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & -1 \\ 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 4i & 0 \\ 0 & -4i & 4 \\ 4-4i & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie jeweils die Minoren der Ordnung $n-1$, die Kofaktormatrix und die Komplementärmatrix sowie – falls möglich – über die Beziehung

$$A \cdot A^{\#} = \det A \cdot E$$

die inverse Matrix. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Ergebnis aus Aufgabe 1, Aufgabenblatt 8.

2. Laplacescher Entwicklungssatz **[5 Punkte]**

a) Finden und beweisen Sie eine allgemeine Formel für die Determinanten der folgenden $(n \times n)$-Matrizen:

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \vdots & & 2 & 0 \\ \vdots & 0 & \iddots & 0 & \vdots \\ 0 & n-1 & & \vdots & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \\ -5 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Benutzen Sie hierzu zunächst elementare Transformationen und danach den Laplaceschen Entwicklungssatz.

3. Cramersche Regel **[4 Punkte]**

Benutzen Sie die Cramersche Regel, um das folgende lineare System zu lösen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 18 \\ 29 \\ 46 \end{pmatrix}.$$

$\Longrightarrow$

4. Eigenwerte und Eigenvektoren **[6 Punkte]**

Die Eigenwerte λ_i einer quadratischen Matrix A lassen sich durch Lösen der Gleichung

$$\det(A - \lambda E_n) = 0$$

bestimmen. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$