1. Matrizenprodukte [4 Punkte]

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \\ 3 & -5 \\ -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die paarweisen Produkte sämtlicher miteinander multiplizierbarer Matrizen! Welchen Rang haben die entstehenden Matrizen und wie ist der Rang einer Produktmatrix mit dem Rang der jeweiligen Faktoren verknüpft?

2. Zeilenstufenform [6 Punkte]

Benutzen Sie Elementarmatrizen um die nachfolgenden Matrizen durch Multiplikation von links auf normierte Zeilenstufenform zu bringen. Geben Sie die notwendigen Einzeloperationen explizit an und ermitteln Sie jeweils die Matrix, die zur Gesamttransformation korrespondiert.

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ 1-i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Folgen Sie hierbei der in der Vorlesung gezeigten Methode und überprüfen Sie Ihr Ergebnis (vergleichen Sie also die Multiplikation mit der zur Gesamttransformation gehörenden Matrix mit Ihrem schrittweise erhaltenen Ergebnis)!

3. Kommutierende Matrizen [4 Punkte]

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -4 \\ 3 & 7 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 12 & 4 & \alpha - 11 \\ \beta - 2 & 2\alpha + 1 & -1 \\ -\beta & 3 & 11 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Parameter α und β so, dass die Matrizen kommutieren, also dass

$$AB - BA = 0\,.$$

$\Longrightarrow$

4. Projektion, noch einmal **[3 Punkte]**

Sei K ein Körper, $M \in M(n \times n; K)$ und $A = \left(\begin{smallmatrix} E_n & M \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} Q\colon K^{2n} &\to K^{2n} \\ x \mapsto Qx &= \begin{pmatrix} 0 & -M \\ 0 & E_n \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

ein Projektor auf $\operatorname{Ker} A \subset K^{2n}$ ist!

5. Nilpotenz **[3 Punkte]**

Eine Matrix J heißt *nilpotent*, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, für das $J^k = 0$. Der Exponent k wird hierbei *Nilpotenzindex* genannt. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion dass die Matrix

$$J = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{1-te Zeile} \\ \text{2-te Zeile} \\ \quad\vdots \\ n\text{-te Zeile} \end{array} \end{array}$$

nilpotent ist und bestimmen Sie den Nilpotenzindex.

$\Longrightarrow$