1. Ebenen im $\mathbb{R}^3$ [5 Punkte]

Seien $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (-1, 0, 1)$, $w_1 = (1, 1, 0)$ und $w_2 = (4, 3, 2)$ Vektoren aus $\mathbb{R}^3$. Seien weiterhin

$$E_1 = \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}w_1 \quad \text{und} \quad E_2 = \mathbb{R}v_2 + \mathbb{R}w_2$$

zwei Ebenen im $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie $E_1 \cap E_2$ und interpretieren Sie den Durchschnitt geometrisch. Sind E_1, E_2, $E_1 \cap E_2$ und $E_1 \cup E_2$ jeweils Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$?

2. Spann und Lineare Unabhängigkeit [7 Punkte]

Wir definieren den *Spann einer Teilmenge* $M \subset V$ eines K-Vektorraumes V als die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus M, also $M \subset \operatorname{span}_K(M) \subset V$. Seien nun

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (3, 0, 2), \quad v_3 = (-3, 3, -4), \quad v_4 = (1, 1, 1) \quad \text{und} \quad v_5 = (0, 0, 0)$$

Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und sei $\mathcal{X} = \mathcal{P}(\{v_1, .., v_5\})$ die Potenzmenge:

$$\mathcal{X} = \{\varnothing, \{v_1\}, \ldots, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}\} .$$

a) Wählen Sie für jedes $k \in \{0, ..., 4\}$ ein $X \in \mathcal{X}$ aus, so dass gilt $\dim(\operatorname{span}_{\mathbb{R}}(X)) = k$.

b) Welche Elemente von $\mathcal{X}$ sind linear unabhängig? Welche Elemente von $\mathcal{X}$ sind eine Basis von $\mathbb{R}^3$? Welche Elemente von $\mathcal{X}$ bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$?

c) Stellen Sie den Vektor $w = (3, -6, -2)$ als Linearkombination von v_1, v_2 und v_4 dar!

3. Basiswahl [4 Punkte]

Finden Sie $n + 1$ Vektoren aus $\mathbb{R}^n$, so dass je n dieser Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden. Begründen Sie Ihre Lösung! Gilt Ihre Lösung auch wenn man $\mathbb{R}^n$ durch $\mathbb{C}^n$ ersetzt?

4. Lineare Unabhängigkeit im Komplexen [4 Punkte]

Für welches $t \in \mathbb{C}$ sind die folgenden Vektoren in $\mathbb{C}^3$ linear abhängig?

$$v_1 = (1 + 2i, 3 - i, 4 + i), \quad v_2 = (-2 - i, 3 - i, 4 - i), \quad v_3 = (2 + 2i, t, 3 + i)$$