

1. Determinante

[4 Punkte]

Bestimmen Sie die Determinante der folgenden $(n \times n)$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & & a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \lambda & a_{n-2} \\ & & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix},$$

deren Einträge abseits der Diagonalen, der linken Nebendiagonale sowie der letzten Spalte Null sind.

2. Determinanten

[4 Punkte]

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix},$$
$$C = \sum_{i=1}^n E_i^{n+1-i}, \quad D = \begin{pmatrix} -20 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & -20 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & -20 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & -20 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & -20 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & -20 \end{pmatrix}.$$

wobei E_i^j eine Matrix ist, die eine einzige Eins in der i -ten Zeile und j -ten Spalte aufweist und ansonsten Nullen. Hinweis: genaues Hinschauen, bevor man mit der Rechnung beginnt, lohnt sich.

3. Inversion

[6 Punkte]

a) Für welche Werte von $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$ sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -2 & 0 \\ -1 & 3 & \alpha - 1 \\ -1 & \alpha & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$B = \begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & a \sin \alpha & b \cos \alpha & ab \\ -\cos \alpha & \sin \alpha & -a^2 \sin \alpha & b^2 \cos \alpha & a^2 b^2 \\ 0 & 0 & 1 & a^2 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}$$

nicht invertierbar?

b) Bestimmen Sie die Inverse zur Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 3+2i & 1-i \\ 13+2i & 3-3i \end{pmatrix}.$$

4. Permutationen

[6 Punkte]

a) Bestimmen Sie das Vorzeichen $\text{sgn } \sigma$ der folgenden Permutationen $\sigma_k \in S_{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$):

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 2n & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}.$$

b) Die Permutationen $\sigma \in S_{10}$ sei durch

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

gegeben. Bestimmen Sie σ^{2019} .

Die folgende Aufgabe ist ein Problem zum Knobeln über die Weihnachtstage, das Ihnen gleichzeitig die Möglichkeit eröffnen soll, einige Zusatzpunkte zu erwerben. Auf diesem Blatt können Sie also bis zu 28 Punkte erreichen – jedoch verbleibt die Punkteschwelle für die Klausurzulassung bei 150 Punkten.

5. Hadamardsche Matrizen

[+8 Punkte]

Sei

$$A_n := \{(a_{ij}) \in M(n \times n; K) \mid a_{ij} = 1 \text{ oder } a_{ij} = -1\}.$$

Finden Sie für jedes $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ eine Matrix A_n so dass deren Determinante maximal wird! Begründen Sie Ihre Lösung!

Dieses Problem ist als „Hadamardsches Problem der maximalen Determinante“ bekannt und hat bis jetzt keine allgemeine Lösung: man kann lediglich obere Grenzen für die Determinanten von quadratischen $(n \times n)$ -Matrizen ($n \in \mathbb{N}$) angeben. Eine Übersicht über die bisherigen Resultate sowie Literaturverweise finden Sie (in englischer Sprache) unter https://en.wikipedia.org/wiki/Hadamard's_maximal_determinant_problem.

Frohe Weihnachten!