1. Bild und Kern**[4 Punkte]**Eine lineare Abbildung F_A sei durch

$$F_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ x \mapsto Ax$$

gegeben. Bestimmen Sie $\text{Ker } F_A$ und $\text{Im } F_A$! Geben Sie für beide Räume eine Basis an!**2. Drehung und Streckung im $\mathbb{R}^2$** **[8 Punkte]**Seien $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Basisvektoren des $\mathbb{R}^2$.

- Überlegen Sie sich, wie die Koordinaten der Einheitsvektoren nach einer Drehung um den Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ im mathematisch positiven Drehsinne lauten und leiten Sie daraus die Form der dazugehörigen Drehmatrix $D(\alpha)$ ab!
- Bestimmen Sie die Bilder der Vektoren $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ unter einer Drehung um die Winkel $\alpha_1 = \pi/4$ und $\alpha_2 = \pi/3$.
- Finden Sie eine Matrix $DS(\beta)$ und einen dazugehörigen Winkel β , so dass der Vektor v_1 auf den Vektor v_2 abgebildet wird:

$$DS(\beta) v_1 = v_2.$$

Beschreibt diese Matrix die gleiche Drehstreckung für *jeden* Vektor auf dem Einheitskreis? Falls nicht, finden Sie eine solche Matrix.

- Betrachten Sie das Bild des Vektors e_1 unter der Abbildung $\alpha \cdot D(\alpha)$:

$$e_1 \mapsto (\alpha \cdot D(\alpha)) \cdot e_1$$

für $\alpha \in [0, 2\pi]$ und zeichnen Sie die entstehende Figur! Könnte man die Klammern in der obigen Abbildungsvorschrift weglassen? $\Rightarrow$

3. Projektion

[8 Punkte]

Gegeben sei der Raum $\mathbb{R}^3$ mit kanonischer Basis und ein Polygon mit den Koordinaten

$$p_1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p_4 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Finden Sie eine Abbildungsmatrix P , die jeden Vektor aus $\mathbb{R}^3$ auf die durch e_1 und e_2 aufgespannte Ebene projiziert. Welchen Rang hat die Matrix P ? Wie lauten die Bilder der Eckpunkte des Polygons nach der Projektion?
- b) Bestimmen Sie eine geeignete Erweiterung der Drehmatrix $D(\alpha)$ aus der vorherigen Aufgabe auf drei Dimensionen und einen Winkel $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, so dass die in Teilaufgabe a) erhaltene Figur in der durch e_1 und e_2 aufgespannten Ebene derart gedreht wird, dass ihre Seiten parallel zu den Achsen in e_1 - und e_2 -Richtung liegen. Wie lauten die Koordinaten der Eckpunkte und was für eine Figur ergibt sich? Vermittelt Ihre gefundene Matrix diese Drehung auch in jeder Ebene parallel zu der durch e_1 und e_2 aufgespannten Ebene? Falls nicht, finden Sie eine solche Matrix!
- c) Welche geometrische Figur erhalten Sie, wenn Sie auf die durch e_2 und e_3 aufgespannte Ebene projizieren und hinterher um $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ in der durch e_2 und e_3 aufgespannten Ebene drehen? Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte an und zeichnen Sie die Figur! Zeigen Sie anschaulich (ohne Rechnung!), dass die erhaltene Figur den gleichen Flächeninhalt wie die Figur aus Aufgabenteil b) hat!