Mathematik: Lineare Algebra

HU Berlin, WS 2019/20

Aufgabenblatt 3

Ausgabe: 31.10.2019

Dr. J. Brödel, Dr. A. Maier, M. Mühlbauer, J. Niehues

Abgabe: 7.11.2019

1. Gruppe und Ring [8 Punkte]

Sei $\mathcal{F} = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Auf $\mathcal{F}$ seien zwei Verknüpfung wie folgt definiert

$$+ \colon \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F} \qquad\qquad \cdot \colon \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$
$$(f, g) \mapsto f + g \qquad\qquad (f, g) \mapsto f \cdot g\,,$$

wobei $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ und $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ sind – es werden also die Summe und das Produkt zweier Funktionen *punktweise* definiert.

a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{F}, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

b) Beweisen Sie, dass $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist. Warum ist $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ kein Körper?

2. Komplexe Einheitswurzeln und zyklische Gruppe [7 Punkte]

Betrachten Sie die Menge der n-ten komplexen Einheitswurzeln

$$W_n := \{w \in \mathbb{C} \,|\, w^n = 1\},\ n \in \mathbb{N}^*$$

und zeigen Sie, dass die Gruppe $(W_n, \cdot)$ wobei $' \cdot '$ die natürliche Multiplikation auf den komplexen Zahlen darstellt, isomorph zur zyklischen Gruppe Z_n ist. Geben Sie den dazugehörigen Gruppenisomorphismus ϕ explizit an.

Zeichnen Sie alle Einheitswurzeln für die Fälle $n = 3, 4, 5$ und stellen Sie diese in der Form $a + ib$ dar.

3. Lexikographische Ordnung für die komplexen Zahlen [5 Punkte]

In der Vorlesung wurde anhand eines Gegenbeispiels gezeigt, dass die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ kein angeordneter Körper sind. In $\mathbb{C}$ kann man aber dennoch eine totale Ordnung einführen. Diese Ordnung $\preceq$ heißt *lexikographische Ordnung* und ist wie folgt gegeben:

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 < x_2 \text{ oder } (x_1 = x_2 \text{ und } y_1 \leq y_2))\,.$$

Zeigen Sie, dass es sich um eine totale Ordnung handelt. Warum heißt diese Ordnung *lexikographisch*?