

1. Diagonalisierung einer hermiteschen Matrix

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -i & -i \\ i & 2 & -1 \\ i & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $P_A(\lambda)$ und die Eigenwerte von A .
- b) Bestimmen Sie für jeden Eigenraum eine Orthogonalbasis!
- c) Bestimmen Sie eine unitäre Matrix S , so dass SAS^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

2. Antisymmetrische und antihermitesche Matrizen

Seien $A, B \in M(n \times n; \mathbb{R})$ zwei antisymmetrische Matrizen, d.h. $A^T = -A$ und $B^T = -B$ und C eine antihermitesche Matrix, also $C^\dagger = -C$.

- a) Zeigen, Sie dass der Raum der reellen antisymmetrischen Matrizen ein Vektorraum ist!
- b) Sei $P \in M(n \times n; \mathbb{R})$ eine beliebige Matrix. Zeigen Sie, dass dann $P^T A P$ ebenfalls antisymmetrisch ist. Gilt die entsprechende Relation auch für die antihermitesche Matrix C und eine Transformationsmatrix $S \in M(n \times n; \mathbb{C})$?
- c) Zeigen Sie, dass iA eine hermitesche Matrix ist!
- d) Beweisen Sie, dass aus $AB = -BA$ folgt, dass AB eine antisymmetrische Matrix ist.
- e) Vergewährtigen Sie sich, dass für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$v^T A v = 0$$

- f) Zeigen Sie, dass aus $A^2 v = 0$ für ein $v \in \mathbb{R}^n$ folgt, dass $Av = 0$.
- g) Welche Eigenwerte kann A haben? Begründen Sie und vergleichen Sie mit den möglichen Eigenwerten einer antihermiteschen Matrix C !