Mathematik: Lineare Algebra

Aufgabenblatt 15

Dr. J. Brödel, Dr. A. Maier, M. Mühlbauer, J. Niehues

HU Berlin, WS 2019/20
Ausgabe: 6.2.2020
Abgabe: 13.2.2020

Dieses Aufgabenblatt ist das letzte zur Vorlesung Lineare Algebra für PhysikerInnen im Wintersemester 2019/20. Die Lösungen hierzu können nicht mehr in den Tutorien besprochen werden. Stattdessen werden Lösungsvorschläge am 13.2.2020 auf der Internetseite veröffentlich werden. Gleichfalls möchte ich den Aufwand für die Korrektoren möglichst gering halten: bitte vermerken Sie auf dem Blatt, wenn das Blatt korrigiert werden soll und Sie die Punkte dafür benötigen.

1. Gamma-Matrizen **[4 Punkte]**

Die sogenannten γ-Matrizen spielen eine wichtige Rolle in der Quantenfeldtheorie. Sie sind durch

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Überzeugen Sie sich, dass die γ-Matrizen spurfrei sind. Zeigen Sie, dass

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} E_4$$

wobei

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und die Zählung der Komponenten in der Matrix η mit 0 begonnen werden soll. (Somit gilt also: $\eta^{00} = 1, \eta^{11} = -1, \ldots$.)

b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sp}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu}$.

c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sp}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho})$.

2. Quadriken **[4 Punkte]**

Die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung mehrerer Unbekannter nennt man eine Quadrik. Während im $\mathbb{R}^3$ Quadriken Objekte wie Hyperboloide und Ellipsoide beschreiben, findet man im $\mathbb{R}^2$ Hyperbeln, Ellipsen und – als einfaches Beispiel – natürlich auch Parabeln.

Eine allgemeine Quadrik Q für n Variablen ist durch die folgende Gleichung bestimmt

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0\,.$$

wobei $a_{ij} = a_{ji}$ und nicht alle Koeffizienten verschwinden.

a) Drücken Sie die gegebene Quadrik mit Hilfe eines Vektors $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ ohne Summenzeichen aus, d.h. finden Sie eine Schreibweise mit einer Matrix A, einem Verschiebevektor b und Vektoren x.

b) Sei

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto Mx + t \end{aligned}$$

eine sogenannte Affinität – dies ist eine invertierbare lineare Abbildung (dargestellt durch die Matrix M) kombiniert mit einer Verschiebung t. Zeigen Sie, dass für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\tilde{Q}(x) = Q(\varphi(x)) = 0$$

wiederum eine Quadrik bestimmt wird. Benutzen Sie hierbei die in Aufgabenteil a) gefunden Schreibweise der Quadrik und geben Sie die neue Quadrik $\tilde{Q}$ ebenfalls in dieser Schreibweise an.

3. Matrixrelation **[3 Punkte]**

Sei A eine (3×3)-Matrix mit $\mathrm{Sp}(A) = 0$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Cayley-Hamilton, dass

$$\det A = \frac{1}{3}\,\mathrm{Sp}(A^3)\,.$$

4. Fibonacci-Folge **[6 Punkte]**

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch: $a_0 := 0,\ a_1 := 1,\ a_{n+2} := a_{n+1} + a_n$.

a) Stellen Sie diese Folge mit Hilfe der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ geeignet dar!

b) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte der Matrix A gleich Φ und $1 - \Phi$ sind, wobei

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

der goldene Schnitt ist. Bestimmen Sie die Diagonalmatrix

$$B = S\,A\,S^{-1}$$

und geben Sie die Matrizen S und S^{-1} explizit an.

c) Weisen Sie mit den vorherigen Ergebnissen die folgende Formel für das n-te Folgenglied nach:

$$a_n = \frac{1}{2\Phi - 1}(\Phi^n - (1 - \Phi)^n)\,.$$

5. Drehung in drei Dimensionen **[3 Punkte]**

Eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ wird durch eine orthogonale (3×3)-Matrix O mit Einheitsdeterminante beschrieben. Betrachten Sie die Eigenwerte der Matrix und zeigen Sie, dass es eine invariante Richtung geben muß: die Drehachse. Zeigen Sie weiterhin, dass der Drehwinkel α um diese Achse durch

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}(\mathrm{Sp}\, O - 1)$$

gegeben ist.