1. Summe von Untervektorräumen

[4 Punkte]

Sei V ein Vektorraum und seien W_1, W_2 Untervektorräume von V mit $V = W_1 + W_2$. Zeigen Sie:

$$\left(\forall w_1 \in W_1, \forall w_2 \in W_2 \text{ mit } w_1 + w_2 = \vec{0} \Rightarrow w_1 = \vec{0} \wedge w_2 = \vec{0} \right) \Leftrightarrow \left(W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\} \right)$$

2. Bild, Faser und Kern

[8 Punkte]

Eine lineare Abbildung F sei durch

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$x \mapsto Ax$$

gegeben.

a) Was ist die genaue geometrische Interpretation dieser Abbildung? Bestimmen Sie $\text{Ker } F$ und $\text{Im } F$ und deren Dimension! Geben Sie für beide Räume eine Basis an und überprüfen Sie die Gültigkeit des „Kern-Bild-Satzes“!

b) Vergegenwärtigen Sie sich die vier Aussagen des Faktorisierungssatzes:

- Finden Sie einen Untervektorraum U , so dass $V = U \oplus \text{Ker } F$ ist!
- Finden Sie die Beschränkung $F|_U \rightarrow \text{Im } F$. Überprüfen Sie die Bijektivität!
- Geben Sie die Projektion P_U auf U explizit an!
- Überprüfen Sie in unserem konkreten Beispiel, dass in der Tat gilt:

$$F^{-1}(F(v)) \cap U = \{P_U(v)\}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

c) Bestimmen Sie die Faser des Bildpunktes $w = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$! Welche Dimension hat die Faser?

d) Bestimmen Sie einen möglichen Aufhängepunkt v und einen Untervektorraum Z so, dass der affine Unterraum

$$X = v + Z$$

gerade der Faser aus der letzten Teilaufgabe gleicht.

e) Was ist die geometrische Interpretation der durch F erzeugten Faserung von $\mathbb{R}^3$?

$\Rightarrow$

3. Affine Räume

[8 Punkte]

Seien $v_0 = (3, 1, 3)$, $v_1 = (-2, 8, -2)$, $v_2 = (4, 0, 4)$, $u_0 = (0, 0, 3)$, $u_1 = (-2, 2, 4)$ und $u_2 = (1, 5, -2)$ Vektoren aus $\mathbb{R}^3$. Seien weiterhin

$$W_1 = v_0 + \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2 \quad \text{und} \quad W_2 = u_0 + \mathbb{R}u_1 + \mathbb{R}u_2$$

zwei Mengen im $\mathbb{R}^3$.

- a) Welche der beiden Mengen W_1 und W_2 sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ und welche sind affine Unterräume?
- b) Bestimmen Sie $W_1 \cap W_2$ und interpretieren Sie den Durchschnitt geometrisch! Ist $W_1 \cap W_2$ ein Untervektorraum? Ist $W_1 \cap W_2$ ein affiner Unterraum?
- c) Geben Sie alle Ebenen $W(\gamma)$ im $\mathbb{R}^3$ an, für die $W_1 \cap W(\gamma) = \emptyset$.
- d) Geben Sie alle diejenigen Ebenen $W(\delta)$ an, für die gilt

$$W_1 \cap W_2 = W_1 \cap W(\delta)$$

und interpretieren Sie Ihr Resultat geometrisch!